С.А. Пименов

Аналитический метод оценки вероятности безотказной работы конструкций

Инженерный расчет конструкции проводится с целью получения гарантии того, что за время эксплуатации не наступит ни одно из недопустимых предельных состояний (отказов). Под предельным состоянием здесь понимается предельное состояние по прочности.

Рассмотрим некоторую абстрактную конструкцию (например, консольная балка длиной L с прямоугольным сечением шириной b, высотой h), нагруженную сосредоточенной силой F. Расчет на прочность в классической постановке, сводится к определению уровня напряжений σ в опасной точке конструкции и дальнейшему сравнению его с допускаемыми напряжениями $[\sigma]$, полученными на базе основных механических характеристик материала с учетом коэффициента запаса прочности. Уровень напряжений σ есть функция основных определяющих параметров. Для случая консольной балки $\sigma = f(F, L, b, h)$, при этом $\sigma \le [\sigma]$.

В общем случае, согласно [1], условие прочности или условие безотказной работы конструкции можно записать в виде:

$$Q \le R, \tag{1}$$

где Q - нагрузка, действующая на конструкцию, усилие в элементах конструкции, напряжения;

R - несущая способность, выраженная в тех же единицах, что и величина нагрузки.

Нагрузка и несущая способность являются изменчивыми, случайными величинами, законы распределения которых можно установить, систематически накапливая и изучая опытные факты, реализующиеся в однородных условиях. Характер этой изменчивости таков, что в большинстве случаев не существует вполне определенного и имеющего практический смысл верхнего предела для нагрузок, равно как и нижнего предела для несущей способности. Поэтому условие (1) не может быть заменено условием:

$$Q_{max} \le R_{min}. \tag{2}$$

Абсолютное требование, чтобы выполнялось неравенство (1), лишено смысла. Можно лишь поставить условие, чтобы в течение срока службы конструкции, это требование было выполнено с той или иной вероятностью, достаточно близкой к единице. Таким образом, инженерные расчеты на прочность следует трактовать с вероятностной точки зрения. Исходя из этого, рассмотрим метод оценки вероятности безотказной работы конструкции.

Запишем условие прочности (1) в виде:

$$\Psi = R - Q > 0. \tag{3}$$

Функцию ψ принято называть функцией неразрушимости. Значения ψ являются случайными ввиду того, что значения R и Q также случайны. Необходимо отметить, что в общем случае как Q, так и R могут иметь различные законы распределения (нормальный, логарифмически нормальный, Релея, Вейбулла, экспоненциальный и др.). Поэтому и функция ψ в каждом конкретном случае также будет иметь различные законы распределения. Для случая нормального распределения R и Q функция ψ также распределена по нормальному закону (рис. 1), так как является линейной их комбинацией [2].

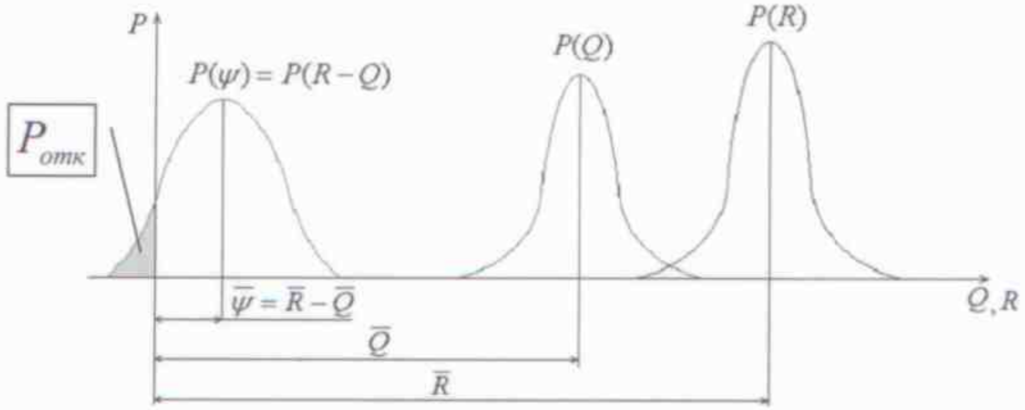

Рис. 1.

Так же запишем выражение для определения вероятности безотказной работы конструкции:

$$N=1-P_{отк} \tag{4}$$

Величина $P_{отк}=P(\psi \le 0)=\int_{-\infty}^{0} p(\psi)d\psi$ есть вероятность разрушения (отказа) конструкции (рис. 1). Если параметры нагрузки и прочности не коррелированны между собой и распределены по нормальному закону, то для квантили $U_{P_{отк}}$ и вероятности отказа $P_{отк}$ получаем выражения:

$$U_{P_{отк}} = \frac{\overline{R}-\overline{Q}}{\sqrt{S_R^2+S_Q^2}} = \frac{\eta-1}{\sqrt{\eta^2 v_R^2+v_Q^2}}, \; P_{отк} = \frac{1}{2}-\Phi(U_{P_{отк}}). \tag{5}$$

В выражениях (5):

$\Phi(U_{P_{отк}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{U_{P_{отк}}} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$ - нормированная функция [2,3];

$S_\psi = \sqrt{S_R^2+S_Q^2}$ - среднее квадратичное значение ψ;

$\overline{\psi} = \overline{R}-\overline{Q}$ - среднее значение ψ;

S_R, S_Q - среднеквадратичные отклонения R и Q соответственно;

$\eta = \dfrac{\overline{R}}{\overline{Q}}$ - условный коэффициент запаса;

$v_R = \dfrac{S_R}{\overline{R}}$ - коэффициент вариации несущей способности;

$v_Q = \dfrac{S_Q}{\overline{Q}}$ - коэффициент вариации нагрузки.

Тогда для определения вероятности безотказной работы конструкции N получаем выражение:

$$N = \frac{1}{2} + \Phi(U_{P_{отк}}) . \qquad (6)$$

Вернемся к рассмотренной ранее конструкции (консольная балка), безотказная работа которой, с вероятностной точки зрения, может быть представлена системой пяти случайных величин: $F, L, b, h, [\sigma]$. Здесь в качестве случайных величин выступают определяющие параметры конструкции, часть которых является аргументами функции R, а часть аргументами функции Q. В общем случае имеется система n случайных величин: $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Путем статистической обработки вариационных рядов определяющих параметров $a_1, a_2, \dots, a_n$ могут быть получены характеристики такой системы: математические ожидания $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots, \overline{a}_n$ и корреляционная матрица:

$$\left\| K_{i,j} \right\| = \left\| \begin{matrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ & & \dots & \\ & & & K_{nn} \end{matrix} \right\| .$$

Пусть величина φ есть функция случайных аргументов $a_1, a_2, \dots, a_n$:

$$\varphi = \varphi\left(a_1, a_2, \dots a_i, \dots a_n\right), \qquad (7)$$

Причем функция φ не линейна, но мало отличается от линейной в области практически возможных значений всех аргументов. Следует заметить, что для большинства конструкций это справедливо [1]. Поэтому найдем характеристики величины φ, применяя метод линеаризации [2, 3].

Рассмотрим функцию $\varphi = \varphi\left(a_1, a_2, \dots a_i, \dots a_n\right)$ в достаточно малой окрестности точки $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots, \overline{a}_n$ (в окрестности математических ожиданий определяющих параметров конструкции). Так как функция в этой окрестности почти линейна, то ее можно приближенно заменить линейной. Это равносильно тому, чтобы в разложении функции в ряд Тейлора около точки $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots, \overline{a}_n$ сохранить только члены первого порядка, а все высшие отбросить:

$$\varphi = \varphi(a_1, a_2, ..., a_n) \approx \varphi(\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n) + \sum_{i=1}^{n} \varphi'_{x_i}(\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n)(a_i - \overline{a}_i). \qquad (8)$$

Тогда среднее значение $\overline{\varphi}$ и дисперсия S_φ^2 определяются следующим образом:

$$\overline{\varphi} \cong \varphi\left(\overline{a}_1, \overline{a}_2, ...\overline{a}_i, ...\overline{a}_n\right);$$

$$S_\varphi^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\varphi(a_1, a_2, ..a_i, ..a_n)}{\partial a_i}\right]_{\overline{a}_i}^2 S_{a_i}^2 +$$
$$+2\sum_{i<j}\left[\frac{\partial\varphi(a_1, a_2, ..a_i, ..a_n)}{\partial a_i}\right]_{\overline{a}_i}\left[\frac{\partial\varphi(a_1, a_2, ..a_j, ..a_n)}{\partial a_j}\right]_{\overline{a}_j} k_{ij} S_{a_i} S_{a_j} \qquad (9)$$

В случае, когда определяющие параметры конструкции a_i не коррелированны (k_{ij}=0 при $i \neq j$) выражение для дисперсия S_φ^2 примет вид:

$$S_\varphi^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\varphi(a_1, a_2, ..a_i, ..a_n)}{\partial a_i}\right]_{\overline{a}_i}^2 S_{a_i}^2, \qquad (10)$$

а коэффициент вариации ν_φ определяется следующим образом:

$$\nu_\varphi^2 = \left(\frac{S_\varphi}{\overline{\varphi}}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\varphi(a_1, a_2, ...a_i, ...a_n)}{\partial a_i}\right]_{\overline{a}_i}^2 \frac{S_{a_i}^2}{\overline{\varphi}^2} \cdot \frac{\overline{a}_i^2}{\overline{a}_i^2}. \qquad (11)$$

Далее введем следующие обозначения:

$\nu_{a_i} = \dfrac{S_{a_i}}{\overline{a}_i}$ - коэффициент вариации i-го определяющего параметра;

$\lambda_i^2 = \left[\dfrac{\partial\varphi(a_1, a_2, ..a_i, ..a_n)}{\partial a_i}\right]_{\overline{a}_i}^2 \dfrac{\overline{a}_i^2}{\overline{\varphi}^2}$ - коэффициент влияния i-го определяющего параметра.

Согласно введенных обозначений запишем (11) в следующем виде:

$$\nu_\varphi^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \nu_{a_i}^2 \qquad (12)$$

В обозначениях и терминах нагрузки Q, несущей способности R, определяющих параметров соответственно q_j и r_i запишем:

$$U_{P_{отк}} = \frac{\eta - 1}{\sqrt{\eta^2 \nu_R^2 + \nu_Q^2}}; \; \nu_R^2 = \sum_{j=1}^{m} \lambda_{jr}^2 \nu_{rj}^2; \; \nu_Q^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{iq}^2 \nu_{qi}^2; \qquad (13)$$

$$\lambda_{jr}^2=\left[\frac{\partial R(r_1,r_2,...r_j,...r_m)}{\partial r_j}\right]^2_{\bar{r}_j}\frac{\bar{r}_j^{\,2}}{\bar{R}^2};\ \lambda_{iq}^2=\left[\frac{\partial Q(q_1,q_2,...q_i,...q_n)}{\partial q_i}\right]^2_{\bar{q}_i}\frac{\bar{q}_i^{\,2}}{\bar{Q}^2},$$

где $\lambda_{jr},\lambda_{iq}$, - коэффициенты влияния определяющих параметров;

ν_{ri},ν_{qi} - коэффициенты вариации определяющих параметров.

Таким образом, можно построить блок-схему определения вероятности безотказной работы конструкции в случае отсутствия корреляции определяющих параметров (рис. 2).

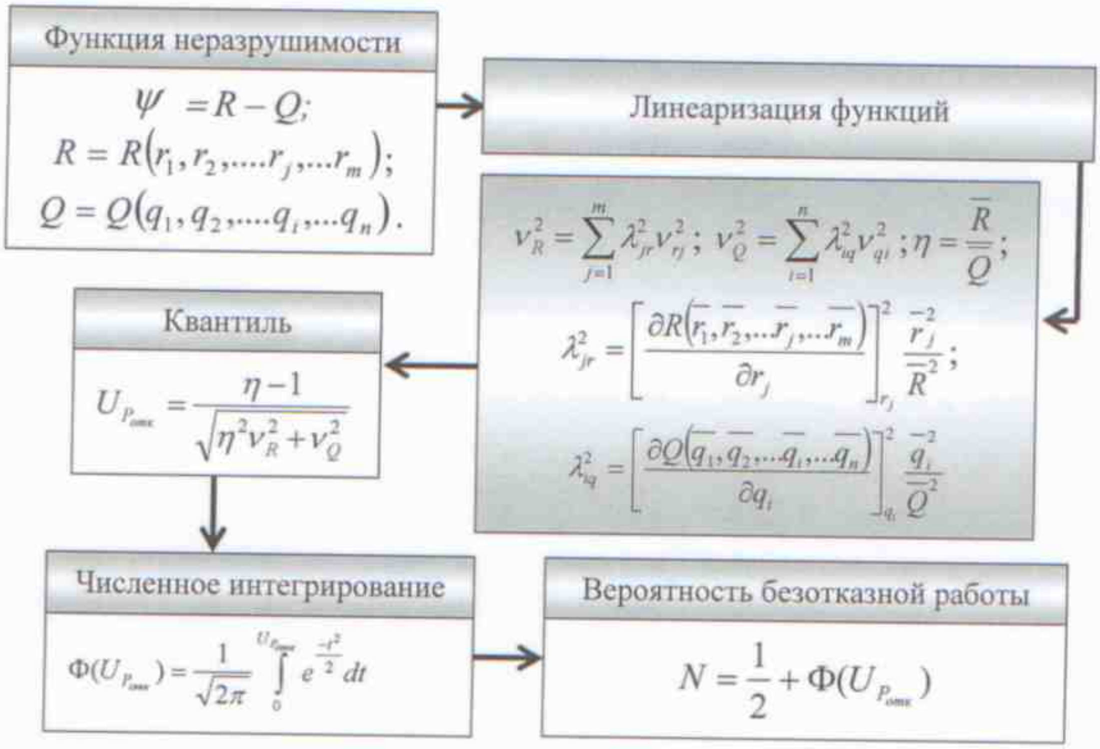

Рис. 2. Определение вероятности безотказной работы конструкции в случае отсутствия корреляции определяющих параметров

Рассмотрим частный случай, когда имеет место корреляция двух определяющих параметров. Обозначим эти параметры как $a_{i+1}=\Delta$ и $a_{i+2}=C$, а коэффициент корреляции этих параметров $k_{\Delta C}$. С учетом введенных обозначений и допущений выражение для дисперсии S_φ^2 примет вид:

$$S_\varphi^2=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\varphi(a_1,a_2,...a_i,a_{i+1},a_{i+2},...a_n)}{\partial a_i}\right]^2_{\bar{a}_i}S_{a_i}^2+$$
$$+2\left[\frac{\partial\varphi(a_1,a_2,...a_i,a_{i+1},a_{i+2},...a_n)}{\partial\Delta}\right]_{\bar{\Delta}}\left[\frac{\partial\varphi(a_1,a_2,...a_i,a_{i+1},a_{i+2},...a_n)}{\partial C}\right]_{\bar{C}}S_\Delta S_C k_{\Delta C}. \qquad (14)$$

Тогда коэффициент вариации ν_φ определяется следующим образом:

$$\nu_\varphi^2=\left(\frac{S_\varphi}{\overline{\varphi}}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\varphi(a_1,a_2,...a_i,a_{i+1},a_{i+2},...a_n)}{\partial a_i}\right]^2_{\overline{a}_i}\frac{S^2_{a_i}}{\overline{\varphi}^2}\cdot\frac{\overline{a}_i^2}{\overline{a}_i^2}+$$

$$+2\left[\frac{\partial\varphi(a_1,a_2,...a_i,a_{i+1},a_{i+2},...a_n)}{\partial\Delta}\right]_{\overline{\Delta}}\left[\frac{\partial\varphi(a_1,a_2,...a_i,a_{i+1},a_{i+2},...a_n)}{\partial C}\right]_{\overline{C}}\cdot\frac{S_\Delta}{\overline{\varphi}}\cdot\frac{\overline{\Delta}}{\overline{\Delta}}\cdot\frac{S_C}{\overline{\varphi}}\cdot\frac{\overline{C}}{\overline{C}}k_{\Delta C}. \qquad (15)$$

Введем следующие обозначения:

$\nu_\Delta=\dfrac{S_\Delta}{\overline{\Delta}}$, $\nu_C=\dfrac{S_C}{\overline{C}}$ - коэффициенты вариации определяющих параметров Δ и C соответственно;

$\lambda_\Delta=\left[\dfrac{\partial\varphi(a_1,a_2,...a_i,a_{i+1},a_{i+2},...a_n)}{\partial\Delta}\right]_{\overline{\Delta}}\dfrac{\overline{\Delta}}{\overline{\varphi}}$ - коэффициент влияния определяющего параметра Δ;

$\lambda_C=\left[\dfrac{\partial\varphi(a_1,a_2,...a_i,a_{i+1},a_{i+2},...a_n)}{\partial C}\right]_{\overline{C}}\dfrac{\overline{C}}{\overline{\varphi}}$ - коэффициент влияния определяющего параметра C.

Согласно введенных обозначений запишем (15) в следующем виде:

$$\nu_\varphi^2=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\nu_{a_i}^2+2\lambda_\Delta\lambda_c\nu_\Delta\nu_c k_{\Delta C}\,. \qquad (16)$$

В общем случае выражение (16) примет вид:

$$\nu_\varphi^2=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\nu_{a_i}^2+2\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j\nu_{a_i}\nu_{a_j}k_{ij}\,, \qquad (17)$$

где

$k_{ij}=\dfrac{\sum_{\gamma=1}^{x}(a_{i_\gamma}-\overline{a}_i)(a_{j_\gamma}-\overline{a}_j)}{\sqrt{\sum_{\gamma=1}^{x}\left(a_{i_\gamma}-\overline{a}_i\right)^2\sum_{\gamma=1}^{x}\left(a_{j_\gamma}-\overline{a}_j\right)^2}}$ - коэффициент корреляции параметров a_i, a_j;

x - объем выборки.

Аналогично (13) запишем выражения для нагрузки Q, несущей способности R и определяющих параметров соответственно q_j, r_i с учетом корреляции:

$$\nu_R^2=\sum_{j=1}^{m}\lambda_{jr}^2\nu_{rj}^2+2\sum_{j<z}\lambda_{jr}\lambda_{zr}\nu_{rj}\nu_{rz}k_{jz}\,;$$

$$\nu_Q^2=\sum_{i=1}^{n}\lambda_{iq}^2\nu_{qi}^2+2\sum_{i<z}\lambda_{iq}\lambda_{zq}\nu_{qi}\nu_{qz}k_{iz}\,; \qquad (18)$$

$$k_{jz} = \frac{\sum_{\gamma=1}^{x}(a_{j_\gamma} - \overline{a_j})(a_{z_\gamma} - \overline{a_z})}{\sqrt{\sum_{\gamma=1}^{x}\left(a_{j_\gamma} - \overline{a_j}\right)^2 \sum_{\gamma=1}^{x}\left(a_{z_\gamma} - \overline{a_z}\right)^2}}; \quad k_{iz} = \frac{\sum_{\gamma=1}^{x}(a_{i_\gamma} - \overline{a_i})(a_{z_\gamma} - \overline{a_z})}{\sqrt{\sum_{\gamma=1}^{x}\left(a_{i_\gamma} - \overline{a_i}\right)^2 \sum_{\gamma=1}^{x}\left(a_{z_\gamma} - \overline{a_z}\right)^2}};$$

$$\lambda_{jr}^2 = \left[\frac{\partial R\left(r_1, r_2, \ldots r_j, \ldots r_m\right)}{\partial r_j}\right]^2_{\overline{r_j}} \frac{\overline{r_j}^2}{\overline{R}^2}; \quad \lambda_{iq}^2 = \left[\frac{\partial Q\left(q_1, q_2, \ldots q_i, \ldots q_n\right)}{\partial q_i}\right]^2_{\overline{q_i}} \frac{\overline{q_i}^2}{\overline{Q}^2},$$

Аналогично рис. 2 построим блок-схему определения вероятности безотказной работы конструкции в случае корреляции определяющих параметров (рис. 3).

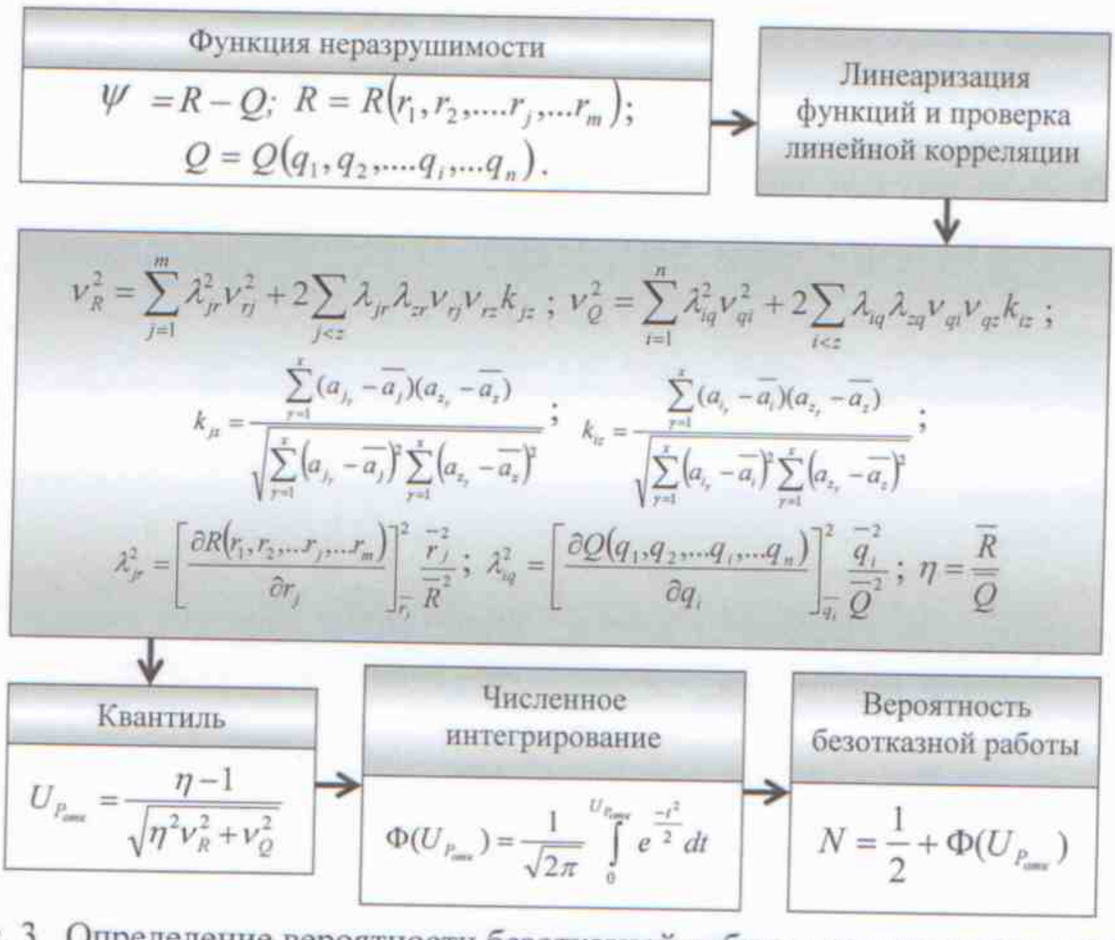

Рис. 3. Определение вероятности безотказной работы конструкции в случае корреляции определяющих параметров

При решении практических задач необходимо выяснить существование корреляционных связей между определяющими параметрами конструкции и, исходя из этого, выбрать соответствующий расчетный алгоритм (алгоритмы показаны на рис. 2 и рис. 3).

Таким образом, следует определить, существенно ли отличается от нуля рассчитанный по ряду измерений объема x эмпирический коэффициент корреляции k_{ij} или, иными словами, взята ли выборка из двумерной нормально распределенной генеральной совокупности с коэффициентом корреляции равным нулю, что позволяет сделать вывод о независимости случайных величин a_i, a_j.

Проверим следующую статистическую гипотезу H_o: k_{ij}=0. Опровержение гипотезы H_o означает, что между определяющими параметрами a_i, a_j существует корреляционная зависимость. В данном случае выборочная функция имеет вид:

$$T = K_{ij}\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{1-K_{ij}^2}}, \qquad (19)$$

с реализацией:

$$t = k_{ij}\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{1-k_{ij}^2}}, \qquad (20)$$

Выборочная функция T удовлетворяет распределению Стьюдента с $K = n-2$ степенями свободы. Критическое значение статистики $t_{\alpha,k}$ распределения Стьюдента определяют по таблице справочника [3].

Если окажется, что $|t| \geq t_{\alpha,k}$, то эмпирический коэффициент корреляции k_{ij} существенно отличен от нуля. В этом случае можно принять, что случайные величины a_i, a_j являются зависимыми.

Если $|t| < t_{\alpha,k}$, то отклонения эмпирического коэффициента корреляции k_{ij} от нуля носят случайный характер (за счет объема выборки). В этом случае можно принять, что случайные величины a_i, a_j являются независимыми и k_{ij} =0.

Заключение

В настоящей статье изложен метод оценки вероятности безотказной работы конструкций (надежности конструкций). В основе метода лежит модель учитывающая: стохастичность механических свойств материалов конструкции; случайность геометрических характеристик; нагрузки вероятностного характера.

Предложенные алгоритмы оценки вероятности безотказной работы применимы для любого рода металлических конструкций при условии нормального распределения нагрузки и несущей способности.

Литература

1. Болотин В.В. Статистические методы в строительной механике. -М.: Стройиздат, 1965.
2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. –М.: Наука, 1969.
3. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗОВ. –М.: Наука, 1966.